# 名古屋創　共形場理論とPainlevé方程式 4/4

2018-05-11　　黒木玄 記



☆ レポートしめきり 6/15

**訂正** 昨日のTh.のRiemannスキームで，$\pm\theta_\infty+\frac{1}{2}$ となっているのは誤りで，正しくは

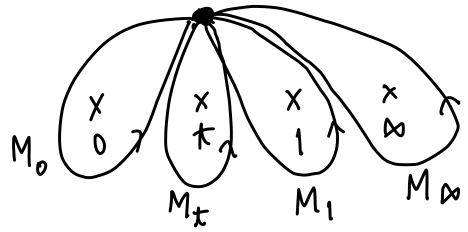
$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & t & \infty \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_t & \theta_\infty \\ -\theta_0 & -\theta_1 & -\theta_t & -\theta_\infty \end{Bmatrix}$$ 各点での $A_i$ の固有値を並べる。　$Y=\left(I+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^{\begin{bmatrix}\theta_\infty & 0 \\ 0 & -\theta_\infty\end{bmatrix}}$ □

## $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n\langle\sim\rangle \text{ の } s \text{ の定義}}$　[Jimbo 1982]

$$\frac{dY}{dx}=\left[\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_t}{x-t}\right]Y,$$ $A_i$ : 2×2行列，固有値は $\pm\theta_i$ $(\theta_i\in\mathbb{Z})$.

モノドロミー行列 $M_\mu$ の積のトレース $p_{\mu\nu}:=\operatorname{tr}(M_\mu M_\nu)=2\cos 2\pi\sigma_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,t)$.

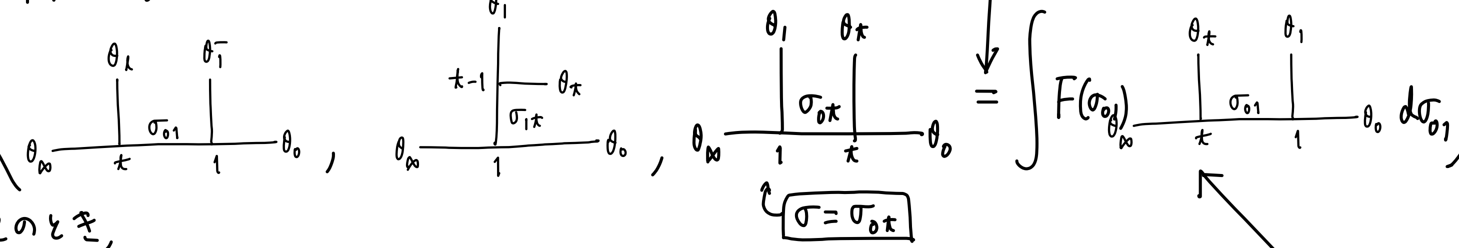
モノドロミー行列 $M_\mu$ のトレース $p_\mu:=\operatorname{tr}M_\mu=2\cos 2\pi\theta_\mu$ $(\mu=0,1,t)$.




$M_\infty M_1 M_t M_0=I$.　$\underbrace{(\sigma_{01},\sigma_{0t},\sigma_{1t})}_{\text{3つのうち2つ独立}}$

Ponsot - Teschner の予想

昨日の話との関係：




このとき，

$$p_{0t}^2+p_{1t}^2+p_{01}^2+p_{0t}p_{1t}p_{01}+p_0^2+p_t^2+p_1^2+p_\infty^2+p_0p_tp_1p_\infty$$
$$=(p_0p_t+p_1p_\infty)p_{0t}+(p_1p_t+p_0p_\infty)p_{1t}+(p_0p_1+p_tp_\infty)p_{01}+4$$

が成立する (Jimbo-Fricke relation).

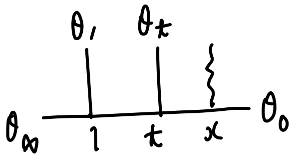
$s$ は　$s\,(\cos 2\pi(\theta_t-\sigma_{0t})-\cos 2\pi\theta_0)(\cos 2\pi(\theta_1-\sigma_{0t})-\cos 2\pi\theta_\infty)$

$\boxed{s=s_{0t}}$　$=(\cos 2\pi\theta_t\cos 2\pi\theta_1+\cos 2\pi\theta_0\cos 2\pi\theta_\infty+i\sin 2\pi\sigma_{0t}\cos 2\pi\sigma_{01})$

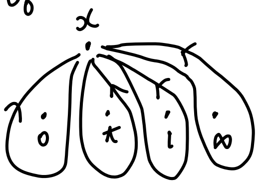
$-(\cos 2\pi\theta_0\cos 2\pi\theta_1+\cos 2\pi\theta_t\cos 2\pi\theta_\infty-i\sin 2\pi\sigma_{0t}\cos 2\pi\sigma_{1t})e^{2\pi i\sigma_{0t}}$

によって与えられる。 注 共形ブロックの立場でこの式を解釈し切れてない。

Rem. 
$$\left.\begin{aligned}&p_{0t}^2 + p_{1t}^2 + p_{01}^2 + p_{0t}p_{1t}p_{01} + p_0^2 + p_t^2 + p_1^2 + p_\infty^2 + p_0p_tp_1p_\infty \\ &= (p_0p_t + p_1p_\infty)p_{0t} + (p_1p_t + p_0p_\infty)p_{1t} + (p_0p_1 + p_tp_\infty)p_{01} + 4\end{aligned}\right\}$$ この式は




のモノドロミー行列 (∞×∞になる!) のモノドロミー関係式 $M_0M_tM_1M_\infty = I$ から出る。




arXiv: 1712.10225
Coman-Pomoli-Teschner ← $W_3$-alg. でやってる.

□

今日は $qP_{VI}$ について紹介したいと思うんですけど、…

# $q$-$P_{\mathrm{VI}}$

**Notation** $|q|<1$, $[u] := \dfrac{1-q^u}{1-q} \to u$ as $q \to 1$, (q-number)

$(a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$, (q-factorial)

$(a;q)_\infty = \prod_{j=1}^{\infty}(1-aq^j)$.

$$(a;p,q)_\infty = \prod_{j,k=0}^{\infty}(1-ap^jq^k),$$

$$\Gamma_q(u) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^u;q)_\infty}(1-q)^{1-u}, \quad G_q(u) = \frac{(q^u;q,q)_\infty}{(q;q,q)_\infty}(q;q)_\infty^{u-1}(1-q)^{-\frac{(u-1)(u-2)}{2}}.$$

$$\vartheta(u) := q^{u(u-1)/2}\Theta_q(q^u), \quad \Theta_q(x) = (x, q/x, q;q)_\infty, \quad (a_1,\dots,a_K;q)_\infty = \prod_{k=1}^{K}(a_k;q)_\infty.$$

このとき,

$$\Gamma_q(u+1) = [u]\Gamma_q(u), \quad G_q(u+1) = \Gamma_q(u)G_q(u), \quad \Gamma_q(1) = G_q(1) = 1,$$

$$\vartheta(u+1) = -\vartheta(u) = \vartheta(-u).$$

"τ" を次のように天下り的に定義する:

$$\tau\left[\begin{matrix}\theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0\end{matrix}\middle| s,\sigma,t\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n t^{(\sigma+n)^2-\theta_t^2-\theta_0^2}\, C\left[\begin{matrix}\theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0\end{matrix}\middle|\sigma+n\right] Z\left[\begin{matrix}\theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0\end{matrix}\middle|\sigma+n,t\right],$$

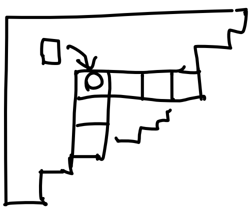
$$C\left[\begin{matrix}\theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0\end{matrix}\middle|\sigma\right] = \frac{\prod_{\varepsilon,\varepsilon'=\pm1}\left(G_q(1+\varepsilon\theta_\infty-\theta_1+\varepsilon'\sigma)\,G(1+\varepsilon\sigma-\theta_t+\varepsilon'\theta_0)\right)}{G_q(1+2\sigma)\,G_q(1-2\sigma)},$$

$$Z\left[\begin{matrix}\theta_1 & \theta_t \\ \theta_\infty & \theta_0\end{matrix}\middle|\sigma,t\right] = \sum_{(\lambda_+,\lambda_-)\in\mathbb{Y}^2} t^{|\lambda_+|+|\lambda_-|}\prod_{\varepsilon,\varepsilon'=\pm1}\frac{N_{\phi,\lambda_{\varepsilon'}}(q^{\varepsilon\theta_\infty-\theta_1-\varepsilon'\sigma})\,N_{\lambda_\varepsilon,\phi}(q^{\varepsilon\sigma-\theta_t-\varepsilon'\theta_0})}{N_{\lambda_\varepsilon,\lambda_{\varepsilon'}}(q^{(\varepsilon-\varepsilon')\sigma})},$$

$$N_{\lambda,\mu}(u) = \prod_{\square\in\lambda}\left(1-q^{-l_\lambda(\square)-a_\mu(\square)-1}u\right)\times\prod_{\square\in\mu}\left(1-q^{l_\mu(\square)+a_\lambda(\square)+1}u\right),$$

$l_\lambda(\square)$ は $\square$ の足の長さ, $a_\lambda(\square)$ は $\square$ のうでの長さ.

例



← 全体 $\lambda$

$l_\lambda(\square) = 2$, $a_\lambda(\square) = 3$.

さらに，$\tau_i$ たちを次のようにずらして定める：　　　$D_5^{(1)}$-lattice $\subset \mathbb{Z}^8$　　　

8個の$\tau$が出て来ることが自然

$$\tau_1 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ \theta_\infty+\frac12 & & \end{array}\right],\quad \tau_2 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ \theta_\infty-\frac12 & & \end{array}\right],$$

$$\tau_3 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ & \theta_0+\frac12 & \sigma+\frac12 \end{array}\right],\quad \tau_4 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ & \theta_0-\frac12 & \sigma-\frac12 \end{array}\right],$$

$$\tau_5 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} \theta_1-\frac12 & & \\ & & \end{array}\right],\quad \tau_6 = \left[\begin{array}{cc|c} \theta_1+\frac12 & & \\ & & \end{array}\right],$$

$$\tau_7 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} & \theta_t-\frac12 & \sigma+\frac12 \\ & & \end{array}\right],\quad \tau_8 = \tau\left[\begin{array}{cc|c} & \theta_t+\frac12 & \sigma-\frac12 \\ & & \end{array}\right].$$

$\boxed{\text{Th.1}}$ [Jimbo-Nagoya-Sakai 2017]　立教大でセミナーをした.（with Hiroe, 4人でセミナー）

$$y = q^{-2\theta_1-1} t \frac{\tau_3\tau_4}{\tau_1\tau_2},\quad z = \frac{\underline{\tau_1}\,\tau_2 - \underline{\tau_1}\,\tau_2}{q^{1/2+\theta_\infty}\underline{\tau_1}\,\tau_2 - q^{1/2-\theta_\infty}\tau_1\underline{\tau_2}},\quad \underline{\tau} = \tau(t/q),\ \overline{\tau} = (qt)$$

は次の$q$-$P_{\mathrm{VI}}$の解になっている：

$$\frac{y\overline{y}}{a_3a_4} = \frac{(\overline{z}-tb_1)(\overline{z}-tb_2)}{(\overline{z}-b_3)(\overline{z}-b_4)},\quad \frac{z\overline{z}}{b_3b_4} = \frac{(y-ta_1)(y-ta_2)}{(y-a_3)(y-a_4)}.$$

（$z$の式は不完全
bilinear eq.をまぜれば
もっとカンタンな形になる.）

ここで，

$$a_1 = q^{-2\theta_1-1},\quad a_2 = q^{-2\theta_1-2\theta_t-1},\quad a_3 = q^{-1},\quad a_4 = q^{-2\theta_1-1},$$

$$b_1 = q^{-\theta_0-\theta_t-\theta_1},\quad b_2 = q^{\theta_0-\theta_t-\theta_1},\quad b_3 = q^{\theta_\infty-\frac12},\quad b_4 = q^{-\theta_\infty-\frac12}.$$

$\boxed{\text{Rem.1}}$ $q\dfrac{a_3a_4}{a_1a_2} = \dfrac{b_3b_4}{b_1b_2}$，$y, z, t$のスケール変換でパラメーター数を4つへらすことができる.　$q$-$P_{\mathrm{VI}}$のパラメータの個数は4個.

Mathematicaで
3次の項まで
↓　チェックした

$\boxed{\text{Conjecture}}$　$\tau_i$たちは次のbilinear eq.をみたす：　（コンピューターでチェックした）

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_1\tau_2 - q^{-2\theta_1}t\tau_3\tau_4 - (1-q^{-2\theta_1}t)\tau_5\tau_6 = 0,\\
&\tau_1\tau_2 - t\tau_3\tau_4 - (1-q^{-2\theta_1}t)\underline{\tau_5}\,\overline{\tau_6} = 0,\\
&\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4 + (1-q^{-2\theta_1}t)q^{2\theta_t}\underline{\tau_7}\,\overline{\tau_8} = 0,\\
&\tau_1\tau_2 - q^{2\theta_t}\tau_3\tau_4 + (1-q^{-2\theta_t})q^{2\theta_t}\tau_7\tau_8 = 0,\\
&\underline{\tau_5}\,\tau_6 + q^{-\theta_1-\theta_\infty+\theta_t-\frac12}t\,\underline{\tau_7}\,\tau_8 - \underline{\tau_1}\,\tau_2 = 0,\\
&\underline{\tau_5}\,\tau_6 + q^{-\theta_1+\theta_\infty+\theta_t-\frac12}t\,\underline{\tau_7}\,\tau_8 - \tau_1\underline{\tau_2} = 0,\\
&\underline{\tau_5}\,\tau_6 + q^{\theta_0+2\theta_t}\underline{\tau_7}\,\tau_8 - q^{\theta_t}\underline{\tau_3}\,\tau_4 = 0,\\
&\underline{\tau_5}\,\tau_6 + q^{-\theta_0+2\theta_t}\underline{\tau_7}\,\tau_8 - q^{\theta_t}\tau_3\underline{\tau_4} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

8本になることが自然.

$\boxed{\text{Rem.}}$ もしも上の conjecture が正しいならば，$z$ の定義を次のように書き直せる．

$$y = (\text{上と同じ}), \qquad z = -q^{\theta_t - \theta_1 - 1} \frac{\tau_7 \tau_8}{\tau_5 \tau_6}. \qquad \square$$

$\boxed{\text{Rem.}}$ $s\sigma = \sigma s p$ のような非可換性を入れることが考えられる． □

$\boxed{\text{Rem.}}$ $q$-$P_{III_3}$ [Berstein-Gav.-Mar. 2017] では，$ab \sum s^n \mathcal{F}(\sigma+n; t)$ のようなことを $a, b, s, \sigma, t$ が非可換 4つので，やっている □

休憩 まだ話したいことがあるので，…

$\boxed{\text{Fact}}$ $q$-$P_{VI}$ はある Lax pair

$$Y(qx, t) = A(x,t) Y(x,t), \quad Y(x, qt) = B(x,t) Y(x,t)$$

の両立条件から出る（[Jimbo-Sakai]）. $y, z$ は次の場所に住んでいる：

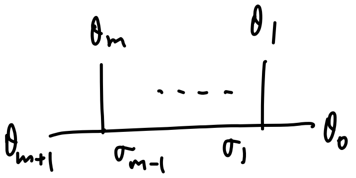
$$A(x,t)_{12} = \frac{q^{\theta_\infty} w (x-y)}{(x-q^{-1})(x - t q^{-2\theta_1 - 1})}, \quad A(y,t)_{11} = \frac{y - t q^{-2\theta_t - 2\theta_1 - 1}}{q z (y - q^{-1})}. \qquad \square$$

これをみたす $Y$ も作りたい．

$$\mathcal{N}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) := \frac{\prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1} G_q(1 + \varepsilon\theta_3 - \theta_2 - \varepsilon'\theta_1)}{G_q(1+2\theta_3)\, G_q(1-2\theta_1)},$$

$q$ 共形ブロックを次のように定める：

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} & \theta_m & \theta_{m-1} & \cdots\cdots & \theta_1 & \\ \theta_{m+1} & \sigma_{m-1} & \sigma_{m-2} & \cdots & \sigma_1 & \theta_0 \end{pmatrix}; x_m, \ldots, x_1 \Big) =$$




$$:= \prod_{p=1}^{m} \mathcal{N}(\sigma_p, \theta_p, \sigma_{p-1})\, q^{2\theta_p \sigma_p^2} x_p^{\sigma_p^2 - \theta_p^2 - \sigma_{p-1}^2}$$

$$\times \sum_{\lambda^{(1)} = (\lambda_+^{(1)}, \lambda_-^{(1)}), \ldots, \lambda^{(m-1)} = (\lambda_+^{(m-1)}, \lambda_-^{(m-1)}) \in \mathbb{Y}^2} \prod_{p=1}^{m-1} \left( \frac{q^{2\theta_p} x_p}{x_{p+1}} \right)^{|\lambda^{(p)}|} \frac{\prod_{p=1}^{m} \prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1} N_{\lambda_\varepsilon^{(p)}, \lambda_{\varepsilon'}^{(p-1)}} \left( q^{\varepsilon \sigma_p - \theta_p - \varepsilon' \sigma_{p-1}} \right)}{\prod_{p=1}^{m-1} \prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1} N_{\lambda_\varepsilon^{(p)}, \lambda_{\varepsilon'}^{(p-1)}} \left( q^{(\varepsilon - \varepsilon')\sigma_p} \right)}.$$

$\lambda^{(m)} = (\phi, \phi) = \lambda^{(0)}$, $\sigma_0 = \theta_0$

$q = t$ とおいた．

$\boxed{\text{Rem.}}$ この $\mathcal{F}$ は quantum troidal $gl_1$ の Fock module 上の intertwiner からある map を作って，その期待値として得られる [Awata-Feigin-Shiraishi 2012].

（intertwiner そのものではなく制限を考える.）

この論文はよみやすくて面白いのでおすすめ，OPE で Nekrasov factor が出て来る！ □

Heine basic hypergeometric series :

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a \ \ b \\ c \end{matrix}; q, x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n\,(b;q)_n}{(c;q)_n\,(q;q)_n}\, x^n . $$

以上の記号のもとで,

$$ \mathcal{F}\left(\begin{matrix} & \frac{1}{2} & & \theta_1 & \\ \theta_\infty & & \theta_\infty+\frac{\varepsilon}{2} & & \theta_0 \end{matrix}; x_2, x_1\right) = C\, x_2^{-\varepsilon\theta_\infty-\frac{1}{2}}\, x_1^{\theta_\infty^2-\theta_0^2-\varepsilon\theta_\infty+\frac{1}{4}}\ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{\frac{1}{2}+\varepsilon\theta_\infty-\theta_1+\theta_0} \ \ q^{\frac{1}{2}+\varepsilon\theta_\infty-\theta_1-\theta_0} \\ q^{1+2\varepsilon\theta_\infty} \end{matrix}; \frac{q^{2\theta_1}x_1}{x_2}\right). $$

$\boxed{\text{Th.}}$ [Jimbo-Nagoya-Sakai]

$$ \mathcal{F}\left(\begin{matrix} & \frac{1}{2} & & \theta_1 & & \theta_t & \\ \theta_\infty & & \theta_\infty+\frac{\varepsilon}{2} & & \sigma & & \theta_0 \end{matrix}; x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{\varepsilon'=\pm 1} \mathcal{F}\left(\begin{matrix} & \theta_1 & & \frac{1}{2} & & \theta_t & \\ \theta_\infty & & \sigma+\frac{\varepsilon'}{2} & & \sigma & & \theta_0 \end{matrix}; x_2, x_1, x_3\right) B_{\varepsilon'\varepsilon}\left[\begin{matrix} \theta_1 & \frac{1}{2} \\ \theta_\infty & \sigma \end{matrix}\middle| \frac{x_2}{x_1}\right] q^{\theta_1^2-\theta_1/2} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\theta_1} $$

ただし, $x = q^u$ で

$$ B_{\varepsilon'\varepsilon}\left[\begin{matrix} \theta_1 & \frac{1}{2} \\ \theta_\infty & \sigma \end{matrix}\middle| x\right] = -\varepsilon' \frac{\vartheta(\frac{1}{2}+\varepsilon\theta_\infty+\theta_1-\varepsilon'\sigma)\,\vartheta(\frac{1}{2}+\varepsilon\theta_\infty+\theta_1+\varepsilon'\sigma+u)}{\vartheta(2\sigma)\,\vartheta(2\theta_1+u)} , $$

← これは $\theta_\infty, \sigma, \theta_1$ について周期1で周期的 □

これを使えば $q=1$ の通常の CFT の場合と同様に議論を進められる.

$x_3$ で展開して, 係数 ($x_1, x_2$ の函数になる) を比較すると, 7次くらいまで両辺は一致する.
(コンピューターを使った.)

上と同様のことは 一般の場合 ($q$-Garnier 系の場合) にできている.

$\boxed{\text{6点函数}}$ 　6点函数でできれば一般のN点函数でもOK.

$\mathcal{F}\left(\begin{matrix} & \theta_2 & & \frac{1}{2} & & \theta_1 & & \theta_t & \\ \theta_3 & & \theta_\infty & & \theta_\infty+\frac{\varepsilon'}{2} & & \sigma & & \theta_0 \end{matrix}; x_3, x_1, x_2, t\right)$ の $\begin{matrix}\lambda,\mu \\ \alpha,\beta\end{matrix}$ に対応する項の $t^{|\lambda|+|\mu|}\, x_3^{-|\alpha|-|\beta|}$ の係数を

$X^{\varepsilon'}_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(\theta_\infty, \theta_1, \sigma; x_1, x_2)$ と書くことにする. 　Young diagrams $\in \mathbb{Y}$

このとき,

$$ X^{+1}_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(\theta_\infty, \theta_1, \sigma; x_1, x_2) = C \sum_{\eta\in\mathbb{Y}} \left(\frac{q^{2\theta_1}x_2}{x_1}\right)^{|\eta|} \frac{N_{\alpha,\eta}(q^{-1})\, N_{\eta,\lambda}(q^{\theta_\infty+\frac{1}{2}-\theta_1-\sigma})\, N_{\eta,\mu}(q^{\theta_\infty+\frac{1}{2}-\theta_1+\sigma})}{N_{\eta,\beta}(q^{2\theta_\infty+1})\, N_{\eta,\eta}(1)} , $$

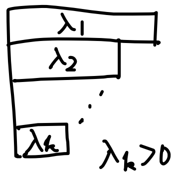
$$ X^{-1}_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(\theta_\infty, \dots) = X^{+1}_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(-\theta_\infty, \dots) . $$

---

$\boxed{\text{Report}}$ 　$\alpha, \beta, \lambda, \mu = \phi$ のとき, $X^{+1}$ の級数部分が ${}_2\phi_1$ で書けることを確認せよ.

Young図形λについて,

$\bar{\lambda} := (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_k - 1)$.

$\lambda =$  $\lambda_k > 0$

$\ell(\lambda) := k$ ← λの長さ.

$T_1$ を $x_1$ に関する $q$ 差分作用素とする. $T_1(f(x_1, x_2)) = f(qx_1, x_2)$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ Young図形 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ に対して, 次が成立する: ← $\varepsilon = \pm 1$.

$$X^{\varepsilon}_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(\theta_\infty, \theta_1, \sigma; x_1, x_2) = C\left(q^{-\ell(\lambda) - \varepsilon\theta_\infty + \theta_1 + \sigma + \frac{1}{2}} T_1 - 1\right)\left(X^{\varepsilon}_{\bar{\lambda},\mu,\alpha,\beta}\left(\theta_\infty, \theta_1 + \tfrac{1}{2}, \sigma + \tfrac{1}{2}; x_1, x_2\right)\right)$$

↑ 隣接関係式

$C = C\begin{pmatrix}\theta_\infty, \theta_1, \sigma, q \\ \lambda, \mu, \alpha, \beta\end{pmatrix}$ ← 具体的に書ける. □

これを使って帰納的にTh.を証明する.

$\boxed{\text{Rem.}}$ $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right){}_2F_1\left({\alpha\ \ \beta \atop \gamma}; x\right) = \alpha\, {}_2F_1\left({\alpha+1\ \ \beta \atop \gamma}; x\right)$ の類似になっている.

上のCはαの類似. □

係数の $X^{\varepsilon}_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}$ ごとにTh.と同様のことが成立していそうなことに,
コンピューターでの計算で気付いた. そのことに気付けば上のLemmaのようなこと
が成立していそうだということになる. しかし, 右辺で $\theta_1, \sigma$ を $\frac{1}{2}$ ずらすことに気付く
までには時間がかかった.

$(q^A T - 1)x^n = (q^{A+n} - 1)x^n$

$\boxed{\text{Rem.}}$ 上のLemmaと同様のことが

$${}_n\phi_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_n)_k}{(b_1, \dots, b_{n-1}, q)_k} x^k$$

についてもできそう. □

$\boxed{\text{Rem.}}$ 上のLemmaではλのサイズを変える関係式, 変えない関係式もあるはず,
それができればBPZ方程式のq-versionが得られる. □

$\boxed{\text{Rem.}}$ 上のLemmaは両辺の $q^{*} - 1$ 型の因子の個数が等しくて $q \to 1$ の極限を
取れる形をしている. $q=1$ の場合の同様の公式も得られる. □

$\boxed{\text{Rem.}}$ 収束性は仮定していた. 収束性を示せれば, $q \to 1$ で $q=1$ の場合のAGT対応
を示せるのではないか? □